

# **Texto para Discussão**

## **Série Economia**

TD-E / 46 - 2005

**Irreversibilidade dos investimentos e opção  
de interromper na extração de petróleo**

Fernando A. S. Postali

Paulo Picchetti

## IRREVERSIBILIDADE DOS INVESTIMENTOS E OPÇÃO DE INTERROMPER NA EXTRAÇÃO DE PETRÓLEO

Fernando A. S. Postali<sup>1</sup>

Paulo Picchetti<sup>2</sup>

**RESUMO:** O objetivo deste artigo é simular o impacto da opção de paralisação temporária sobre a decisão de investir no setor de petróleo e gás, à luz do debate sobre a importância das flexibilidades operacionais para o valor de um projeto de investimento. O modelo engloba os custos cumulativos (Efeito Jevons), peculiares da indústria do petróleo. Utiliza-se a abordagem das opções reais, poderosa para avaliar oportunidades de investimento cujos gastos são irreversíveis. Assume-se que tanto o preço do petróleo quanto o custo operacional são estocásticos, na forma de um movimento browniano geométrico. Duas conclusões principais emergem do trabalho: a) o valor da flexibilidade mais do que compensa o efeito da irreversibilidade sobre a decisão de investir; b) a opção de parar torna o investimento bem menos sensível a variações na taxa de crescimento dos custos unitários e de outros parâmetros.

**PALAVRAS-CHAVE:** petróleo, investimento, opções reais.

**ABSTRACT:** *The aim of this paper is to simulate the impact of the option of shutdown on the decision to invest in the oil and gas sector, in the light of the debate about the importance of operational flexibilities on the project's value. The model embeds cumulative costs (Jevon's Effect), which are peculiar in oil industry. We use the Real Option's Approach, which are powerful to evaluate investment opportunities whose expenses are irreversible. We assume that the oil price and operational costs are both stochastic, evolving as a Geometric Brownian Motion. Two main conclusions emerge from the paper: a) the value of flexibility overcompensates the effect of irreversibility on the decision to invest; b) the shutdown option makes the investment much less sensitive to changes on the growing rate of unit costs and other parameters.* (JEL Classification: Q32, G31)

**KEYWORDS:** *petroleum, investment, real option.*

---

<sup>1</sup> IPE/USP

<sup>2</sup> Departamento de Economia/USP

### ***1. Introdução:***

A indústria de petróleo apresenta características peculiares que a tornam um campo de estudo bastante complexo, sobretudo quanto aos determinantes do investimento neste setor. Em particular, trata-se de investimentos de longo prazo de maturação e os ativos da indústria possuem um elevado grau de especificidade. Estas duas características tornam o investimento neste setor altamente *irreversível*, isto é, os gastos não podem ser revertidos uma vez empreendidos. A irreversibilidade do investimento é um elemento acarreta custos de oportunidade na decisão de desenvolver um campo de petróleo, de modo que deve ser adequadamente incorporado na avaliação do projeto. A ferramenta que permite a incorporação da irreversibilidade na decisão de investir é a metodologia das *opções reais* [DIXIT & PINDYCK (1994); SCHWARTZ & TRIGEORGIS (2001); COPELAND (2002)].

Uma companhia petrolífera que adquire direitos de exploração sobre certa área está comprando um ativo que pode desenvolver imediatamente ou mais tarde, dependendo das condições de mercado. Este ativo, portanto, é uma *opção* – o direito de decidir quando uma reserva será desenvolvida, dentro de certos limites temporais. Durante a fase de produção, a companhia pode decidir acelerar a extração a fim de aproveitar um momento de alta no preço do petróleo ou, similarmente, reduzir ou paralisar a produção em períodos de preço muito baixo. Por outro lado, a velocidade de extração do recurso está diretamente ligada ao crescimento dos custos unitários, um fenômeno conhecido na literatura como “Efeito Jevons”: devido à limitação física do estoque, à medida que a produção se acumula (equivalendo ao esgotamento da jazida), o custo marginal se eleva, em virtude da progressiva diminuição da pressão nos poços. Desta forma, se os custos se tornarem proibitivos, o produtor tem a opção de abandonar a atividade. A avaliação por opções reais se tornou amplamente aceita na avaliação de investimentos petrolíferos [e.g.: MOSZKOWICZ (2003)], mas a cumulatividade dos custos (ou, de forma análoga, a finitude natural dos estoques dos recursos) foi deixada de lado conforme a análise de opções reais foi ganhando espaço na literatura como método dominante de avaliação das jazidas.

O objetivo deste artigo é avaliar como a presença da opção de paralisação temporária da extração permite amenizar os efeitos da irreversibilidade dos investimentos na decisão de investir no desenvolvimento de jazidas de hidrocarbonetos. Além disso, incorporamos a finitude do estoque do recurso na natureza através do Efeito Jevons – crescimento dos custos unitários de extração ao longo do tempo. Mostraremos, através de um exercício numérico, que 1) o valor da flexibilidade adicionada pela opção de interromper é mais que suficiente para compensar eventuais atrasos no investimento produzidos pela irreversibilidade; 2) a opção de paralisar torna o investimento menos sensível a alterações na taxa de crescimento dos custos.

A discussão é relevante por duas razões básicas. Do ponto de vista teórico, nota-se que a literatura não traz um consenso sobre a importância dos valores das flexibilidades. Há autores [e.g.: DAVIS & CAIRNS (1999)] que admitem que o valor destas opções é diminuto o suficiente para que se possa desprezá-las. Do ponto de vista regulatório, por sua vez, o debate é útil para avaliar em que medida a flexibilização da trajetória de extração pelo concessionário contribuiria para a atração de investimentos no Brasil.

Este trabalho está dividido em três seções subsequentes: na seção 2, apresentamos um panorama sobre esta discussão na literatura; na seção 3, apresentamos o modelo e

explicamos os conceitos envolvidos; na seção 4, trazemos os resultados e as considerações conclusivas.

## 2. O debate teórico

A avaliação de recursos naturais não-renováveis é antiga e conta com uma extensa literatura. HOTELLING (1931) foi um dos pioneiros nesta pesquisa, estabelecendo o que ficou conhecido como *Lema de Hotelling*, segundo a qual o valor unitário da reserva, dado pela diferença entre o preço e o custo marginal de extração (também conhecido com o valor sombra), deve crescer à taxa de juros com vistas a evitar oportunidades de arbitragem. Isto é, se  $P_t = P_t - C_t$ :

$$\frac{\dot{I}}{I} = r \quad (1)$$

Pelo princípio de Hotelling, qualquer desequilíbrio nesta relação pode produzir trajetórias de extração sub-ótimas. Se a taxa de crescimento do valor sombra for maior (menor) que a taxa de juros, o produtor deve reduzir (aumentar) a taxa de extração, para maximizar o valor presente esperado de seus lucros.

A dependência do valor da reserva em relação ao custo tem significados importantes, pois está ligada à qualidade do recurso no solo. Entretanto, existem diferenças de abordagem, conforme salienta CAIRNS (1990, 1994), entre os enfoques de HOTELLING (1931) e GRAY (1914), sobre a avaliação de recursos exauríveis. Mesmo correndo-se o risco de abusar da linguagem, pode-se dizer que o primeiro fornece uma abordagem mais “macroeconômica”, com ênfase na trajetória da renda do recurso e nas condições de equilíbrio intertemporal da extração, vinculada à sua finitude. Uma abordagem que foi posta de lado foi a de GRAY (1914), de conteúdo mais “microeconômico”, voltada para as diferenças de qualidade entre as jazidas e sua extração ótima. Segundo seus resultados, as jazidas mais abundantes devem ser exploradas primeiro, em um esquema análogo às terras ricardianas. As diferenças qualitativas entre as jazidas são expressas por diferenças nos custos unitários de extração e, à medida que as reservas de pior qualidade começam a ser exploradas, os custos unitários tendem a crescer, refletindo as dificuldades crescentes de produção. Deste ponto de vista, a abordagem de GRAY (1914), embora menos conhecida e voltada para os custos, representa uma alternativa à análise de HOTELLING (1931), que privilegia o estoque físico dos recursos. Neste contexto, a inclusão dos custos na avaliação da jazida constitui um retorno à metodologia de Gray, que foi relativamente deixada de lado na literatura.

A insuficiência de métodos baseados no valor presente líquido foi bem sentida pela teoria, na medida em que não modelava a incerteza de maneira adequada, não incorporava as decisões irreversíveis de investimento e as flexibilidades operacionais que conferem valor ao projeto. Neste contexto, as opções reais surgiram como uma aplicação da teoria das opções financeiras com vistas a preencher tais lacunas [DIXIT & PINDYCK (1994)]. Desta forma, as avaliações de investimento por opções reais foram se desenvolvendo através da incorporação do valor das flexibilidades operacionais, como opção de investir (TOURINHO, 1979; PADDOCK & al., 1988), paralisar (BRENNAN & SCHWARTZ, 1985), de ampliar a capacidade de operação (PINDYCK, 1988), *time to build* (MAJD & PINDYCK, 1990), de abandonar, dentre outras<sup>3</sup>.

<sup>3</sup> TRIGEORGIS (1993) analisa a interação entre diversas opções embutidas em um projeto.

Deve-se ter em vista que o valor sombra estabelece uma espécie de valor fundamental para os recursos no subsolo, na medida em que está baseado no conceito de valor presente líquido. Entretanto, há uma controvérsia em que medida o princípio de Hotelling é suficiente para avaliar as reservas, dado que não incorpora as *opções* operacionais embutidas no projeto, nem o efeito da irreversibilidade do investimento. Em outras palavras, para que o valor sombra seja uma medida útil da viabilidade do investimento, é necessário que os valores das flexibilidades sejam pequenos. A literatura buscou, de uma maneira ou de outra, estudar tais efeitos, mas os resultados são pouco conclusivos, pois são sensíveis às hipóteses adotadas sobre as opções presentes.

BJERKSUND & EKERN (1990) levantaram a discussão e, através de um modelo aplicado à extração de recursos não-renováveis, analisam diversas flexibilidades e concluem que o efeito da flexibilidade temporal do investimento (possibilidade de adiar a decisão) é significativo, mas o efeito adicional da opção de abandono ou da flexibilidade operacional sobre o valor do projeto é pequeno. Mesmo assim, aconselham que elas não sejam ignoradas, pois podem induzir a decisões de investimento precipitadas ou equivocadas.

DAVIS & CAIRNS (1999) procuram medir o grau de precisão do princípio de avaliação de Hotelling e em que medida ele fornece um limite superior ou inferior para o valor das reservas. Eles concluem que, na presença de incerteza, de restrições tecnológicas ou regulatórias para a extração do recurso, o princípio de Hotelling tende a sobreavaliar o verdadeiro valor da reserva e o crescimento do seu valor sombra tende a ser inferior à taxa de juros<sup>4</sup>. A análise das opções reais vai na direção oposta, isto é, a desconsideração das flexibilidades que conferem valor às reservas levam o princípio de Hotelling a subavaliá-las. DAVIS & CAIRNS (1999) argumentam que o valor de tais flexibilidades é pequeno, insuficiente para invalidar seus resultados, mas não quantificam este efeito.

TRIGEORGIS (1993) chama a atenção para a não-aditividade das opções, isto é, as flexibilidades, na medida em que interagem entre si, agregam valor de forma *não aditiva*. Por exemplo, o valor incremental de uma opção de abandono é diferente na presença e na ausência de opção de paralisação. Em particular, mostra-se que o valor incorporado por uma opção adicional, na presença de outras flexibilidades, é menor que o seu valor isolado, além de ser decrescente no número de opções presentes. Em termos matemáticos, se  $F_i$  for o valor da flexibilidade (opção)  $i$ , tem-se, em geral:

$$F_1 + F_2 + \dots + F_n \neq F_{(1,\dots,n)}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{n+1} = 0$$

onde  $F_{(1,\dots,n)}$  é o valor conjunto das  $n$  opções. Desta forma, a desconsideração de uma opção específica tende a não acarretar erros de avaliação quanto maior o número de flexibilidades presentes no projeto.

Esta constatação acarreta uma série de dificuldades para a avaliação por opções reais, dentre as quais o fato de que o exercício de uma opção afeta, necessariamente, o valor das opções remanescentes<sup>5</sup>. De acordo com TRIGEORGIS (1993), só é possível separar os

<sup>4</sup> Vale observar que a exigência de que  $r > \alpha - \phi$  é consistente com esta constatação, ou seja, se  $\phi$  representa a restrição tecnológica e assumirmos que  $\alpha - \phi$  é uma *proxy* para o crescimento da renda de Hotelling, a afirmação de DAVIS & CAIRNS (1999) pode ser interpretada como uma consequência do fato do valor fundamental da reserva ser finito.

<sup>5</sup> Além disso, não há muito consenso sobre a importância das flexibilidades. KULATILAKA & MARKS (1988) mostram que é possível que a presença de uma tecnologia flexível *versus* uma tecnologia rígida pode reduzir o valor da firma, ao invés de elevá-lo.

valores das opções quando não existe interação entre elas e isso é tanto mais provável quanto menos o exercício de uma afetar o valor de outra. Segundo ele, as opções tendem a ser mais aditivas quando: a) as opções envolvidas são de tipo oposto (*compra* vs. *venda*); b) as maturidades são próximas (ou então são de tipo européia); c) quando as opções estão “*out of money*” (cujo exercício não é vantajoso). Nestes casos, as regiões de exercício não se sobrepõem, garantindo a aditividade. Apesar desta advertência, a grande maioria dos trabalhos em opções reais tende a utilizar a propriedade da aditividade, que só é válida para casos muito específicos.

KULATILAKA (1995) também aborda o problema da interatividade dos valores das opções presentes em um projeto. Segundo ele, os valores incrementais de cada opção podem ser crescentes ou decrescentes quando um projeto já possui outras flexibilidades operacionais. Sua conclusão é de que a opção de esperar para investir vale menos na presença da opção de paralisação temporária e/ou crescimento, implicando em uma relação de *substituidade*<sup>6</sup> entre elas; por outro lado, a opção de paralisar vale mais na presença de opção de crescimento, identificando uma relação de *complementaridade* entre ambas.

Em síntese, a importância do valor das flexibilidades sobre a decisão de investir é complexa e depende das hipóteses sobre as opções presentes. Entretanto, os modelos supracitados não levam em conta o Efeito Jevons e em que medida ele afeta a decisão de investir. O modelo a seguir propõe incorporá-lo de uma maneira razoavelmente simples.

### 3. O modelo

O modelo desenvolvido a seguir se baseia na avaliação de investimentos em petróleo e gás, com base em opções reais [TOURINHO, 1979; PADDOCK et. al, 1988], com a inclusão de flexibilidades que conferem valor ao projeto [McDONALD e SIEGEL, 1985] e a metodologia de DIXIT (1989), presente também em PINDYCK (1988, 1991) e DIXIT & PINDYCK (1994). Considerando que investimentos em projetos de extração de petróleo compreendem duas fases principais, a de *exploração* e a de *desenvolvimento/produção*, o contexto do modelo pode ser situado entre o término da fase exploratória, quando a incerteza de ordem geológica foi dissipada, e a declaração de desenvolvimento, quando o investidor anuncia o interesse em prosseguir com o projeto, construindo a infraestrutura necessária para extrair o recurso. Trata-se, portanto, de um modelo de investimento em dois estágios<sup>7</sup>: de posse da *reserva não-desenvolvida*, o agente deve avaliar se é ótimo ou não exercer a opção de transformá-la em *reserva desenvolvida*. A título de simplificação, assumimos que, uma vez realizado, o investimento no desenvolvimento é concluído imediatamente, isto é, estamos ignorando o tempo de construção (*time to build*<sup>8</sup>). Entretanto, depois de efetuado, o investimento não pode ser revertido, de modo que é necessário incorporar o custo de oportunidade de desenvolver a reserva.

Apesar da irreversibilidade, o modelo pode ser estendido em direção a duas possíveis flexibilidades: presença de opção de paralisação da produção sem custos e possibilidade de interrupção a um certo custo. Mostraremos como a existência desta

<sup>6</sup> Ou seja, a presença de opção de paralisar tenderia a reduzir o valor da opção de esperar, facilitando o investimento.

<sup>7</sup> Aqui, não entendido como sinônimo de *time to build* como alguns autores.

<sup>8</sup> MAJD & PINDYCK (1987) incorporam o *time to build* em sua análise, mas o relaxamento desta hipótese não traz diferenças qualitativas nos resultados. A inclusão do tempo de instalação apenas acentua o efeito da incerteza.

flexibilidade adiciona valor ao investimento, contribuindo para elevar a disposição de investir e como a incorporação do efeito Jevons através dos parâmetros de evolução do custo de produção, afeta a regra de investimento.

### 3.1: Valor Unitário da Reserva Desenvolvida:

Suporemos que o valor unitário da reserva desenvolvida,  $V(P, C, t)$  seja governado por duas variáveis de estado, o *preço* e o *custo operacional de produção*, os quais seguem os quais seguem movimento browniano geométrico:

$$dP = \alpha_P P dt + \beta_P P dZ_P \quad (2)$$

$$dC = \alpha_C C dt + \beta_C C dZ_C \quad (3)$$

onde  $\alpha_P$  e  $\alpha_C$  são os crescimentos esperados do preço e do custo;  $dZ_P$  e  $dZ_C$  são processos de Wiener tal que  $E(dZ_P dZ_C) = \rho dt$ ,  $E(dZ_P) = E(dZ_C) = 0$ ,  $E(dZ_P)^2 = E(dZ_C)^2 = dt$ , onde  $\rho$  é o coeficiente de correlação entre as variações de  $P$  e  $C$ .  $\beta_P$  e  $\beta_C$  são os desvios padrão instantâneos de cada processo.

Na análise aqui proposta, a taxa de crescimento dos custos unitários é dada por  $\alpha_C$ , um parâmetro associado a uma propriedade em geral ignorada, mas importante, da função custo de produção: o efeito estoque (também conhecido como efeito Jevons<sup>9</sup>). À medida que a reserva vai sendo extraída, o custo unitário<sup>10</sup> de produção tende a crescer, pois fica cada vez mais difícil extrair o recurso remanescente em virtude da queda da pressão nos poços. Ou seja, assumindo que o custo unitário é inversamente proporcional ao tamanho físico da reserva, se  $\rho$  for a taxa de decaimento das reservas  $S$ , temos<sup>11</sup>:

$$S_t = S_0 e^{-\rho t} \quad (4)$$

Como  $C_t$  e  $S_t$  são inversamente proporcionais:

$$C_t S_t = C_0 S_0$$

De (Erro! Vínculo não válido.):

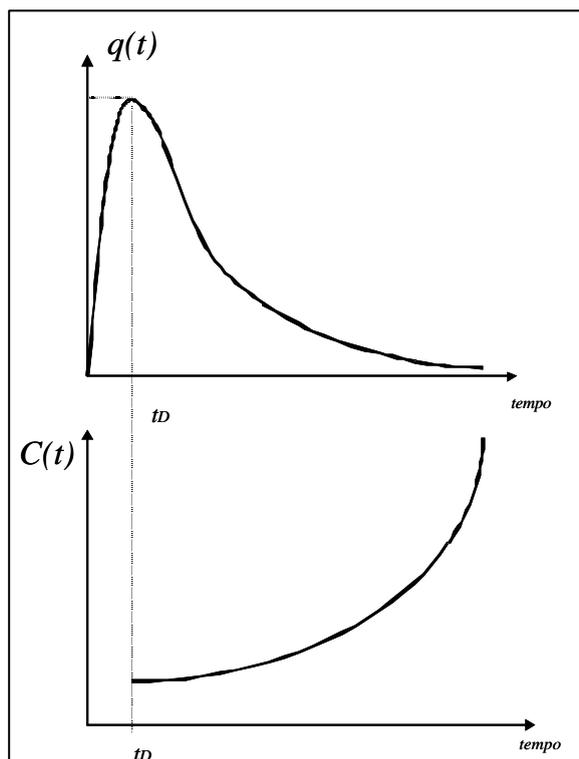
$$\begin{aligned} C_t S_0 e^{-\rho t} &= C_0 S_0 \\ C_t &= C_0 e^{\rho t} \end{aligned} \quad (5)$$

Ou seja, o parâmetro que expressa a taxa de decaimento da reserva pode ser interpretado como a própria taxa de crescimento dos custos unitários. Assim, a incorporação do efeito estoque é importante para avaliar a disposição de investir dos agentes, já que se trata de uma particularidade da função de custos no setor extrativo. Além disso, como estamos trabalhando em termos unitários, o crescimento da função custo constitui uma forma alternativa de expressar o progressivo esgotamento da reserva em relação ao usual estoque inicial do recurso. Desta forma, ao invés de tratarmos de *quantidade*, voltamos a análise para a *qualidade da reserva*, que pode ser indicada pelo montante de investimento necessário para desenvolver uma unidade da mesma.

<sup>9</sup> Ver OSMUNDSEN (1998) para as implicações do efeito estoque sobre a função custo. Na denominação de CHERIAN *et al.* (2000), esta propriedade se chama “custos cumulativos”.

<sup>10</sup> A rigor, o custo marginal. Mas assumimos que o custo marginal é igual ao custo médio variável.

<sup>11</sup> Trata-se, portanto, de uma forma de unificar as análises de HOTELLING (1931) e GRAY (1914). CAIRNS (1994) propõe um retorno à abordagem deste último com vistas a uma melhor modelagem da heterogeneidade das jazidas, bem como da endogeneidade das descobertas.



**Figura 1: Produção e custos unitários no tempo**

A figura **Erro! Vínculo não válido.** ilustra a idéia. A produção cresce gradativamente até  $t_D$ , instante em que a fase de desenvolvimento é concluída. Neste período, a produção atinge seu ponto máximo – platô – quanto, a partir de então, entra em declínio gradativo em decorrência do esgotamento da jazida. A contrapartida deste fenômeno é o crescimento dos custos unitários a partir de  $t_D$ .

De acordo com a hipótese acima formulada, o parâmetro  $\beta$  expressa a relação entre a produção e o total de reservas, um importante indicador prático do ritmo de extração e, portanto, do tempo disponível do recurso. Como a variação da reserva é dado pela quantidade extraída  $y$ , tem-se  $y = -dS/dt = \beta S$ , por **Erro! Vínculo não válido.** Desta forma,  $\beta^{-1} = S/y$ . Trata-se de um indicador que avalia em termos práticos a disponibilidade futura de petróleo e pode ser tratado como uma variável de decisão. É medido em anos.

Outra vantagem em incorporar diretamente a evolução dos custos reside em flexibilizar a usual regra do “1/3”<sup>12</sup>. Trata-se de uma regra de avaliação (também conhecida como equação *Business*) que compreende a multiplicação de um fator  $q$  sobre o preço do barril com vistas a encontrar o valor da unidade de reserva, a qual depende linearmente do preço spot do petróleo. Em resumo, supõe-se que  $V = qP - I$ , onde  $V$  é o valor unitário da reserva desenvolvida,  $P$  o preço e  $I$  o investimento por barril. O fator  $q$  sintetiza todas as características geológicas da reserva – qualidade, tipo, etc. PADDOCK et. Al (1988) utilizam o valor de  $q = 1/3$ , o qual se tornou referência nos trabalhos posteriores. Além disso, esta abordagem não incorpora explicitamente a evolução dos custos, assumindo-se

<sup>12</sup> PADDOCK et al. (1988), DIAS (2001), MOSZKOWICZ (2003).

que este possui correlação unitária com os preços. Conforme mostramos adiante, a especificação do processo dos custos permite assumir correlação imperfeita entre estas variáveis, o que é mais compatível com a realidade.

Como se pode verificar, assumimos que a taxa esperada de crescimento do preço é dada por  $\gamma$ . Trata-se de um parâmetro crucial para a avaliação da reserva. Em geral, os modelos de avaliação de ativos preferem trabalhar com o conceito de *convenience yield*  $\gamma$ , que depende inversamente da taxa de crescimento do valor do ativo. O *convenience yield* é análogo à taxa de dividendo para os ativos financeiros e pode ser interpretado como o benefício líquido de se estocar uma unidade marginal do recurso<sup>13</sup>. Por esta razão, no contexto em questão, ele pode ser entendido como o custo de oportunidade de adiar o desenvolvimento da reserva, mantendo em aberto a opção de investir.<sup>14</sup>

O objetivo do agente é maximizar o valor da reserva e os lucros por ela proporcionados. Como estamos avaliando uma unidade de reserva (um barril), não há variável de controle (quantidade extraída<sup>15</sup>), pelo princípio de Bellman, temos:

$$rV(P, C, t)dt = L(P, C, t)dt + E_0(dV) \quad (6)$$

A equação (6) estabelece a condição de ótimo do problema, que requer que o retorno da reserva à taxa livre de risco,  $rVdt$ , deve ser o igual aos lucros proporcionados pela jazida,  $L$ , mais a variação esperada em seu valor, em equilíbrio. Estamos assumindo que a taxa de juros livre de risco é o parâmetro utilizado pelo investidor para compor a taxa de desconto intertemporal<sup>16</sup>.

A função de lucro unitário  $L$  é dado por:

$$L = (1-R)[(1-\gamma)P - C] \quad (7)$$

onde  $\gamma$  é a alíquota de *royalties*, que incide sobre a receita, e  $R$  é a alíquota de uma versão *lato sensu* do imposto sobre a renda do recurso<sup>17</sup>.

Pelo Lema de Itô, e desconsiderando ordens de  $dt$  iguais ou superiores a 2<sup>18</sup>:

$$dV = V_P dP + V_C dC + \frac{1}{2} V_{PP} (dP)^2 + \frac{1}{2} V_{CC} (dC)^2 + V_{PC} dP dC + V_t dt \quad (8)$$

Por hipótese, sabemos que  $E_0(dZ_P) = E_0(dZ_C) = 0$ , que  $E_0(dZ_P)^2 = E_0(dZ_C)^2 = dt$  e que  $E_0(dZ_P dZ_C) = \gamma dt$ , temos a expressão para  $E_0(dV)$ :

<sup>13</sup> No mercado financeiro, a taxa de dividendos, em equilíbrio, é igual à diferença entre a taxa de juros livre de risco e a taxa de crescimento do ativo fundamental. Se não houver dividendos, ambas devem ser iguais na ausência de arbitragem. No caso de ativos reais, não existe uma razão para que o valor do ativo cresça à taxa de juros. Assim, o *convenience yield* costuma ser associado a uma “taxa de dividendos” mas, na verdade, ele está ligado à diferença entre a taxa de juros e a taxa de crescimento do valor do ativo. Pelo fato de haver uma cunha entre ambas, há um benefício em estocar o ativo.

<sup>14</sup> Assumimos que o produtor é pequeno a ponto de tomar como dado o preço do petróleo. PINDYCK (1988) generaliza o processo para o caso da presença de uma equação de demanda da firma na forma de  $P = q(t) - gQ$ , onde  $q(t)$  segue um MBG. Se o produtor é price taker como estamos assumindo,  $g = 0$ .

<sup>15</sup> Aqui, o único parâmetro associado à quantidade extraída é a taxa de decaimento das reservas,  $\phi$  suposto exógeno.

<sup>16</sup> Conforme salienta PINDYCK (1991), os resultados do efeito da incerteza sobre a decisão de investir prescindem de qualquer hipótese sobre as preferências do agente em relação ao risco ou sobre em que medida o risco do projeto é correlacionado com o portfólio de mercado. Sejam as firmas neutras ou avessas ao risco, alterações estocásticas em  $P$  (ou  $C$ ) podem ser completamente diversificáveis e o efeito da incerteza sobre a regra de investimento será sempre o mesmo, podendo diferir apenas na intensidade.

<sup>17</sup> A equação (7) é equivalente a um imposto sobre os lucros no qual a despesa com *royalties* pode ser deduzida:  $(1 - R)[P - C - \gamma P]$

<sup>18</sup> Notação:  $V_X = dV/dX$  e  $V_{XX} = d^2V/dX^2$ .

$$E_0(dV) = V_P P \alpha dt + V_C C \phi dt + \frac{1}{2} V_{PP} \sigma_P^2 P^2 dt + \frac{1}{2} V_{CC} \sigma_C^2 C^2 dt + V_{PC} \sigma_P \sigma_C PC dt + V_t dt \quad (9)$$

Substituindo (9) em (6) e rearranjando:

$$\frac{1}{2} V_{PP} \sigma_P^2 P^2 + \frac{1}{2} V_{CC} \sigma_C^2 C^2 + V_{PC} \sigma_P \sigma_C PC + V_P \alpha P + V_C \phi C + V_t + (1-R)[(1-\tau)P - C] - rV = 0 \quad (10)$$

A expressão (10) é uma equação diferencial parcial e não tem solução analítica. Entretanto, podemos assumir uma hipótese derivada da dinâmica do estoque de reservas e permitir uma trajetória determinística para o termo  $V_t$ . Conforme salienta DIXIT & PINDYCK (1994, cap. 7),  $V_t$  pode ser interpretado como a depreciação do projeto. Os projetos no setor de petróleo apresentam duas características fundamentais: são de longa duração e depreciam conforme o esgotamento da jazida. Assim, se supusermos que, uma vez iniciado, a condição de abandono será o esgotamento econômico do recurso, podemos substituir  $V_t$  por  $-rV$ , ou seja, o valor da reserva se deprecia proporcionalmente à sua taxa de decaimento<sup>19</sup>.

Mesmo com essa substituição, a equação (10) possui solução complicada, podendo requerer métodos numéricos de grande complexidade, pelo fato da função objetivo  $V$  ser governada por dois fatores ( $P$ ,  $C$ ). O resultado da equação diferencial irá gerar um problema de “livre fronteira”, isto é, precisamos saber todas as combinações de  $P$  e  $C$  que tornam ótimo investir ou não. Para esta classe de problemas, as soluções analíticas são raras e as soluções numéricas são quase sempre *ad hoc*, desenvolvidas para cada caso particular<sup>20</sup>. Em sua essência, o problema não difere do caso em que apenas o preço é incerto só que, ao invés de obtermos um “preço crítico” acima do qual a decisão de investir se torna ótima, obtém-se uma “fronteira crítica” e o problema se complica devido à sua bi-dimensionalidade. Entretanto, *se o preço e o custo seguem um movimento browniano geométrico*, é possível reduzir o problema a apenas uma variável de estado, devido à propriedade de homogeneidade da função  $V$ . Ou seja, assumindo que  $V(P, C) = Cv(P/C) = Cv(p)$ , o objetivo do problema passa a ser determinar a função  $v(p)$ .

A definição da variável  $p = P/C$  e a propriedade da homogeneidade conduzem às seguintes relações<sup>21</sup>:

$$V_P = v'(p) ; \quad V_C = v(p) - pv'(p) ; \\ V_{PP} = v''(p)/C ; \quad V_{PC} = -pv''(p)/C ; \quad V_{CC} = p^2 v''(p)/C$$

Substituindo as relações acima em (10) e dividindo ambos os lados por  $C$  temos<sup>22</sup>:

$$\frac{1}{2} (\sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_C + \sigma_C^2) p^2 v''(p) + (\alpha - \phi) pv'(p) - rv(p) + (1-R)[(1-\tau)p - 1] = 0 \quad (11)$$

<sup>19</sup> Embora muitos modelos estabeleçam que a condição de transversalidade para problemas de extração seja o esgotamento físico da jazida ( $S(T) = 0$ ), esta hipótese é inconsistente com as considerações de otimização de lucro, já que neste caso, teríamos  $C(T) = \mathbb{Y}$ . Na realidade, a condição terminal deve ser  $V(S(T)) = 0$ . Ver OSMUNSEN (1998).

<sup>20</sup> DIXIT & PINDYCK (1994).

<sup>21</sup> As notações  $v'(\cdot)$  e  $v''(\cdot)$  significam a primeira e a segunda derivada com relação a  $p$ .

<sup>22</sup> Vale ressaltar que este resultado de homogeneidade só é válido para o caso em que ambas as variáveis de estado seguem um MBG. Não é possível empregar esta transformação quando pelo menos uma delas segue um processo de reversão à média, tendo em vista que o drift se torna função do nível da variável.

A expressão (11) é uma equação diferencial ordinária que admite solução homogênea e particular. É possível verificar facilmente que a solução particular é dada por:

$$v^* = (1 - R) \left[ \frac{(1 - \tau)p}{r - \alpha + \phi} - \frac{1}{r} \right] \quad (12)$$

A interpretação da solução particular é direta. Ela representa o valor fundamental do barril de petróleo, isto é, o seu valor presente:

$$\begin{aligned} VP &= \int_0^{\infty} (1 - R)[(1 - \tau)P(t) - C(t)]S(t)e^{-rt} dt = \int_0^{\infty} (1 - R)[(1 - \tau)P_0e^{\alpha t} - C_0e^{\phi t}]S_0e^{-\phi t}e^{-rt} dt \\ &= (1 - R) \left[ \frac{(1 - \tau)P_0}{r - \alpha + \phi} - \frac{C_0}{r} \right] \end{aligned}$$

desde que  $r > (\alpha - \phi)$ . Esta hipótese corresponde à exigência de que o *convenience yield* seja maior que zero ( $\alpha > 0$ ), quando se incorporam os custos cumulativos (usualmente, para custos constantes, teríamos  $r > \alpha$ ). Se isso não ocorrer, o custo de oportunidade do investimento sempre excede seu benefício e a firma nunca irá instalar capacidade para extração [PINDYCK, (1988)], o que equivale tornar negativo o valor da reserva desenvolvida<sup>23</sup>. A expressão acima é a (12) multiplicada por  $C_0$ . Ela pode ser interpretada, de acordo com DIXIT e PINDYCK (1994), como o valor fundamental do ativo que, no nosso caso, é o barril de petróleo.

A solução homogênea assume a forma funcional  $v_H = Ap^2$ . Substituindo em (11),  $v_H$  é dado pela solução da equação característica:

$$\frac{1}{2}(\sigma_p^2 - 2\rho\sigma_p\sigma_c + \sigma_c^2)\beta^2 + \left[ \alpha - \phi - \frac{1}{2}(\sigma_p^2 - 2\rho\sigma_p\sigma_c + \sigma_c^2) \right] \beta - r = 0 \quad (13)$$

A equação (13) admite duas soluções,  $\beta_1 > 1$  e  $\beta_2 < 0$ . De forma que a solução homogênea da equação diferencial é dada por:

$$v_H = A_1 p^{\beta_1} + A_2 p^{\beta_2} \quad (14)$$

Assim, a solução total será  $v = v^* + v_H$ . As constantes  $A_1$  e  $A_2$  são determinadas pelas condições de transversalidade próprias de acordo com as flexibilidades admitidas pelo projeto.

Com vistas a ilustrar o valor da flexibilidade na avaliação do projeto de investimento, tomemos dois casos separados: A) quando o investidor não possui opção de parada temporária e B) quando o agente é capaz de interromper a produção temporariamente, caso as condições econômicas não sejam favoráveis.

*Caso A: Sem opção de paralisação temporária:* Neste caso, se o preço do petróleo cair a zero, a reserva perderá valor, de modo que a primeira condição de transversalidade será  $v(0) = 0$  o que, em (14), requer  $A_2 = 0$ , dado que  $\beta_2 < 0$ .

A outra constante,  $A_1$  é mais difícil de ser excluída e representa o componente de bolha de  $v$  obtido quando  $p \rightarrow \infty$ . Entretanto, é possível demonstrar que o primeiro termo de (14) representa justamente a possibilidade dos agentes avaliarem o ativo a um valor acima do seu fundamento se esperam revendê-lo posteriormente com ganho de capital.

<sup>23</sup> Conforme apontam HILLIARD & REIS (1998), o *convenience yield* sintetiza as informações sobre as preferências do consumidor em relação ao risco e sobre a tecnologia de produção, de modo que  $d = r - a + f$  pode ser considerado um *convenience yield* aumentado para incorporar o efeito do custo  $f$ .

Aplicando o Lema de Itô, utilizando a equação característica (13) e lembrando que  $dp/p = dP/P - dC/C$ , é possível demonstrar depois de algum trabalho algébrico que:

$$E[d(p^{?1})/p^{?1}] = r dt \quad (15)$$

Em uma avaliação livre de risco, o primeiro componente de  $v_H$  em (14) tem taxa de retorno igual à taxa de juros livre de risco. É interessante observar que independe de  $?_1$  (só dependeria se a taxa de retorno fosse ajustada ao risco). Qualquer desequilíbrio nesta relação tenderá a produzir um movimento de compra (se  $E[d(p^{?1})/p^{?1}] > r dt$ ) ou de venda (caso contrário) do ativo avaliado em  $p^{?1}$ , de modo que a maneira de excluir a bolha representada pelo primeiro componente de (14) é tomando  $A_1 = 0$ .

Desta forma, portanto, se excluirmos as bolhas especulativas, o valor fundamental de uma unidade da reserva será dada por  $v^*$  em (12).

$$v(p) = (1-R) \left[ \frac{(1-t)p}{r-a+f} - \frac{1}{r} \right] \quad (16)$$

*Caso B: Com opção de paralisação temporária:* Suponhamos que o produtor possa paralisar, a um custo  $E$ , a operação sempre que as condições econômicas forem desfavoráveis, ou seja, o preço caia demasiadamente ou haja um declínio acentuado da demanda. Se houver opção de paralisar a produção, a função lucro (7) se torna<sup>24</sup>:

$$L = \text{Max}\{0, (1-R)[(1-?)P - C]\} \quad (7')$$

A equação diferencial que governa o valor da reserva irá depender da função de lucro. Se a jazida estiver inoperante, desenvolvida ou não, apenas a parte homogênea da solução permanecerá, assumindo a forma funcional  $v(p) = H_1 p^{?1} + H_2 p^{?2}$ , onde  $H_1$  e  $H_2$  são constantes a serem determinadas; por outro lado, em caso de operação, a solução de (11) será dada por:

$$v(p) = B_1 p^{\beta_1} + B_2 p^{\beta_2} + (1-R) \left[ \frac{(1-\tau)p}{r-\alpha+\phi} - \frac{1}{r} \right]$$

A determinação das constantes requer a utilização de condições de transversalidade. Se a operação estiver paralisada (ou não-desenvolvida), o valor da reserva é a opção de retomada das atividades (ou de desenvolver)<sup>25</sup>. Conforme os argumentos apontados anteriormente, se  $p \rightarrow 0$ ,  $v(p) \rightarrow 0$ , de modo que  $H_2 = 0$ ; por outro lado, se o projeto estiver em operação, o valor da unidade de reserva pode ser interpretado como a opção de suspender, de forma que, se  $p \rightarrow \infty$ , é improvável que o investidor a exerça. Assim, como  $?_1 > 0$ , devemos ter  $B_1 = 0$ .

Em síntese, se houver opção de paralisação, o valor da reserva desenvolvida será dado por:

$$v(p) = \begin{cases} B_2 p^{\beta_2} + (1-R) \left[ \frac{(1-\tau)p}{r-\alpha+\phi} - \frac{1}{r} \right] & \text{se } \textit{opera} \\ H_1 p^{\beta_1} & \text{se } \textit{n\~ao\_opera} \end{cases} \quad (17)$$

<sup>24</sup> Na verdade, estamos normalizando os custos fixos para zero.

<sup>25</sup> Esta interpretação pressupõe a aditividade do valor, discutido por TRIGEORGIS (1993).

É interessante observar, no caso de operação, como a opção de paralisar a extração adiciona uma cunha ao valor fundamental. Assim, a desconsideração de flexibilidades pode levar a uma sub-avaliação do projeto.

A determinação do modo de operação, isto é, se a jazida opera ou não, irá depender da razão  $p \circ P/C$  crítica. Sejam  $p^E$  e  $p^S$ , respectivamente, as razões preço-custo críticas que determinam o desenvolvimento e a interrupção da atividade em caso desta estar operando<sup>26</sup>. A decisão ótima da empresa conforme cada faixa de  $p$  irá depender de seu modo de operação: se a reserva não foi desenvolvida, a variável de decisão será  $p^E$ , isto é, o valor crítico que determina o exercício da opção de desenvolver e, conseqüentemente, operar<sup>27</sup>; por outro lado, se a reserva está desenvolvida, a decisão será entre paralisar ou não a produção, determinada pelo valor crítico  $p^S$  (preço de saída). A tabela abaixo resume as decisões ótimas de acordo com o valor de  $p$ .

**Tabela 1: Modo de operação e preço crítico.**

<i>Nível de <math>p \circ P/C</math></i>	<i>Jazida não desenvolvida</i>	<i>Jazida desenvolvida</i>
$p < p^S$	Permanece	Paralisada
$p = p^S$	Permanece	Indiferente entre operar e paralisar
$p^S < p < p^E$	Permanece	Operante
$p = p^E$	Indiferente entre desenvolver ou não	Operante
$p > p^E$	Desenvolve	Operante

É interessante observar como  $p^S$  e  $p^E$  são diferentes entre si e a razão preço-custo neste intervalo caracteriza um fenômeno de histerese [DIXIT (1992)]: mesmo que  $p^E$  tenha sido o preço-custo determinante da entrada, a firma só irá paralisar as atividades se este parâmetro cair abaixo de  $p^S < p^E$ . Do mesmo modo, o preço  $p^S$  não é suficiente para induzir a entrada/desenvolvimento, requerendo que o mesmo atinja o patamar mínimo  $p^E$ .

A decisão de investir ou não depende da comparação dos valores das reservas desenvolvida e não desenvolvida. Assim, é preciso analisar como esta última evolui de acordo com os parâmetros do preço e do custo, o que será objeto da subseção a seguir.

### 3.2: Valor Unitário da Reserva Não Desenvolvida:

Seja  $F(P,C,t)$  o valor unitário da reserva não-desenvolvida. Novamente, supomos que ele seja governado pelo preço e pelo custo, segundo os movimentos brownianos geométricos acima definidos. O valor da reserva não-desenvolvida pode ser interpretado como uma opção de compra cujo ativo fundamental é uma unidade de reserva desenvolvida e o preço de exercício são os gastos em investimento  $I$ . A princípio, incluir os custos operacionais no valor da reserva não-desenvolvida pode parecer estranho, mas deve-se ter em vista que se trata de uma variável fundamental para a avaliação do investimento, dadas as propriedades dinâmicas típicas dos recursos exauríveis [OSMUNDSEN, 1998].

A equação de Bellman resultante<sup>28</sup> é:

<sup>26</sup> Os sobrescritos E e S denotam, respectivamente, “entrada” e “saída”.

<sup>27</sup> Assume-se que não faz sentido desenvolver uma jazida para mantê-la inoperante.

<sup>28</sup> Na verdade, para sermos rigorosos, deveríamos definir  $F(V,t)$ . Entretanto, como apontam DIXIT e PINDYCK (1994), nesta situação o processo de difusão de  $V$  se torna complicado, dificultando

$$rF(P, C, t)dt = E_0(dF) \quad (18)$$

Aplicando o lema de Itô, obtemos a seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{1}{2}F_{PP}\sigma_P^2 P^2 + \frac{1}{2}F_{CC}\sigma_C^2 C^2 + F_{PC}\sigma_P\sigma_C PC + F_P\mathbf{a} + F_C\mathbf{f} + F_t - rF = 0 \quad (19)$$

A equação (19) é análoga à equação (11), exceto pela inexistência do termo de lucro. Trata-se de uma equação diferencial parcial sem solução analítica, devido ao termo  $F_t$ , que estabelece a evolução do valor da reserva conforme o tempo passa. Isso acontece pois, na maioria dos casos, há um prazo máximo até o qual o investidor deve declarar seu interesse em desenvolver suas reservas ( $T$ ), sob pena de perder a concessão. Todavia, conforme argumenta PADDOCK *et al.* (1988), se o tempo de exploração for superior a 5 anos, a diferença entre os preços críticos das opções com tempo limitado e perpetua é pequeno, de modo que o termo  $F_t$  pode ignorado sem erros significativos de avaliação. Assim, partiremos para o caso extremo em que o investidor se depara com um tempo ilimitado para declarar o desenvolvimento da jazida<sup>29</sup>.

Outra dificuldade para a solução de (19) é a existência de duas variáveis de estado,  $P$  e  $C$ , determinando o valor da reserva. Novamente, utilizamos o resultado de homogeneidade adotado para a reserva desenvolvida, ou seja,  $F(P, C) = Cf(P/C) = Cf(p)$ . Dados os resultados das derivadas de  $f$  com relação a  $p$ , a equação diferencial se torna:

$$\frac{1}{2}(\sigma_P^2 - 2\rho\sigma_P\sigma_C + \sigma_C^2)p^2 f''(p) + (\alpha - \phi)pf'(p) - (r - \phi)f(p) = 0 \quad (20)$$

A equação (20) é análoga à parte homogênea de (11), admitindo solução analítica na forma:

$$f(p) = H_1 p^{\beta_3} + H_2 p^{\beta_4} \quad (21)$$

com  $\beta_3 > 0$  e  $\beta_4 < 0$  raízes do polinômio característico e  $H_1$  e  $H_2$  constantes a serem determinadas. Dado que quando  $p \rightarrow 0$ , é improvável que a reserva seja desenvolvida,  $f(0) = 0$ , ou seja,  $H_2 = 0$ .

Duas novas condições de transversalidade são necessárias<sup>30</sup>:

$$F(P, C) = V(P, C) - I \Rightarrow f(p) = v(p) - I/C \quad (22)$$

$$f'(p) = v'(p) \quad (23)$$

A equação (22) é chamada *condição de contato* (*value matching condition*) e determina que a condição de ótimo para o exercício da opção de investimento é a igualdade entre o valor da reserva não-desenvolvida,  $F$ , e o valor da reserva desenvolvida,  $V$ , líquido do custo de investimento<sup>31</sup>. Ou seja, se  $F(P, C) > V(P, C) - I$ , é melhor para o investidor esperar, pois o valor da reserva não desenvolvida supera o da desenvolvida subtraída do

consideravelmente a solução da equação diferencial ligando  $V$  a  $F$ . Uma solução alternativa mais simples é ligar diretamente  $F$  aos parâmetros que governam  $V$ , usando sua solução como condições de contorno que definem o exercício ótimo.

<sup>29</sup> No caso brasileiro, a Lei do Petróleo estabelece prazos de até 9 anos entre a obtenção da concessão de exploração e a declaração de comercialidade, o que se encaixaria na aproximação adotada.

<sup>30</sup> A rigor, como estamos trabalhando com dois fatores,  $P$  e  $C$ , seria necessária uma terceira condição:  $f(p) - pf'(p) = v(p) - pv'(p) - I/C$ , derivada da condição de *smoothing past*  $F_C = V_C$ . Entretanto, esta equação é redundante pois representa uma combinação das anteriores.

<sup>31</sup> Estamos ignorando o tempo de construção (*time to build*). Ou seja, supomos que a passagem da fase de exploração para a de desenvolvimento/produção é instantânea, sendo necessário apenas o desembolso do Investimento I.

investimento<sup>32</sup>. O desenvolvimento imediato, por sua vez, é ótimo quando ocorre o inverso. Assim, a expressão estabelece a condição de continuidade para as funções  $F$  e  $V$  em seu ótimo.

A expressão (23) expressa a chamada *condição de suavidade (smoothing past condition)*, que impõem que as duas funções sejam contínuas também em suas inclinações, evitando “quebras” no ponto de ótimo<sup>33</sup>.

### 3.3: Preços críticos de investir e paralisar:

Os valores críticos  $p^E$  e  $p^S$  são determinados pelas condições de transversalidade (contato e suavidade) em cada modo de operação. Considere, primeiro, a decisão de desenvolver ou não a reserva. Substituindo (17a) e (21) em (22) e (23), temos:

$$-H_1(p^E)^{\beta_3} + B_2(p^E)^{\beta_2} + (1-R)\left[\frac{(1-\tau)p^E}{r-\alpha+\phi} - \frac{1}{r}\right] - i = 0 \quad (24)$$

$$-H_1\beta_3(p^E)^{\beta_3-1} + B_2\beta_2(p^E)^{\beta_2-1} + \frac{(1-R)(1-\tau)}{r-\alpha+\phi} = 0 \quad (25)$$

onde  $i$  °  $I/C$ . Esta última é uma variável difícil de conceituar, pois representa a razão entre o investimento para o desenvolvimento e o custo operacional do barril de petróleo. Se assumirmos que as diferenças de qualidade das reservas se traduzem em diferentes níveis de investimento  $I$  para a obtenção de um processo operacional com custos semelhantes,  $C$ , é possível identificar a qualidade da reserva apenas com a comparação do índice  $i$ .

Se a firma estiver operando, ela deve considerar a decisão de paralisar as operações se as condições econômicas se tornarem adversas, isto é, o preço-custo cair abaixo de  $p^S$ . As condições de contato e de suavidade serão:

$$\begin{aligned} v(p^S) &= f(p^S) - ? \\ v'(p^S) &= f'(p^S) \end{aligned}$$

onde  $? \neq E/C$ , sendo  $E$  o custo de paralisação. É interessante observar que, quando a reserva está desenvolvida, porém paralisada, ela irá ter a mesma solução geral que uma reserva não-desenvolvida, já que a diferença entre ambas se dá apenas devido ao termo de lucro nas equações diferenciais. Portanto, substituindo as soluções gerais acima:

$$-H_1(p^S)^{\beta_1} + B_2(p^S)^{\beta_2} + (1-R)\left[\frac{(1-\tau)p^S}{r-\alpha+\phi} - \frac{1}{r}\right] + \varepsilon = 0 \quad (26)$$

$$-H_1\beta_1(p^S)^{\beta_1-1} + B_2\beta_2(p^S)^{\beta_2-1} + \frac{(1-R)(1-\tau)}{r-\alpha+\phi} = 0 \quad (27)$$

As equações (24), (25), (26) e (27) formam um sistema não linear com as incógnitas  $H_1$ ,  $B_2$ ,  $p^E$  e  $p^S$ . Ele não tem solução analítica, devendo ser resolvido por métodos

<sup>32</sup> A condição (22) também pode ser interpretada como a igualdade  $V(P,C) = F(P,C) + I$ , ou seja, o valor da reserva deve ser igual ao custo de investir incluindo o valor da flexibilidade de adiar,  $F$ , que representa um custo de oportunidade de adiar o investimento.

<sup>33</sup> O apêndice C do cap. 4 de DIXIT & PINDYCK (1994) fornece a demonstração matemática para ambas as condições.

numéricos. Como ambas as constantes  $H_1$ ,  $B_2$  refletem opções de retomada e paralisação, respectivamente, elas devem ser positivas<sup>34</sup>.

Consideremos agora a situação em que não há opção de parada, ou seja, as equações (26) e (27) deixam de fazer parte do sistema e  $B_2 = 0$  nas equações anteriores. Assim, se  $p_{NO}^E$  for o preço de entrada crítico quando não há opção de interrupção, temos:

$$H_1(p_{NO}^E)^{\beta_3} = (1-R) \left[ \frac{(1-\tau)p_{NO}^E}{r-\alpha+\phi} - \frac{1}{r} \right] - i \quad (28)$$

$$\beta_3 H_1(p_{NO}^E)^{\beta_3-1} = \frac{(1-R)(1-\tau)}{r-\alpha+\phi} \quad (29)$$

Após certo trabalho algébrico, tem-se:

$$p_{NO}^E = \frac{\beta_3}{(\beta_3-1)} \left[ \frac{r-\alpha+\phi}{(1-\tau)} \right] \left[ \frac{1}{r} + \frac{i}{(1-R)} \right] \quad (30)$$

Finalmente, com vistas a concluir as expressões para a análise dos impactos de  $R$ ,  $\tau$  e dos demais parâmetros sobre  $p^E$ , na análise de valor presente líquido, devemos ter  $v(p_{VPL}^E) - i = V(P,C) - I = 0$ , já que neste caso não há possibilidade de atrasar (lembrando que a principal característica da análise de VPL é a característica “agora ou nunca” do investimento<sup>35</sup>). Assim, para o caso de valor presente líquido:

$$p_{VPL}^E = \left[ \frac{i}{1-R} + \frac{1}{r} \right] \left( \frac{r-\alpha+\phi}{1-\tau} \right) \quad (31)$$

Comparando as expressões (30) e (31), observamos que elas diferem pela presença do fator multiplicativo  $\beta_3/(\beta_3-1) > 1$  na análise de opções reais, dado que  $\beta_3 > 1$ . DIXIT & PINDYCK (1994) chamam este termo de “múltiplo do valor da opção”, o qual acrescenta uma margem sobre o valor crítico  $p^E$  da regra do valor presente líquido. Este termo surge em decorrência da *incerteza* (representada nos parâmetros  $\sigma_P$  e  $\sigma_C$ ) e da *irreversibilidade* do investimento. Desta forma, a regra do VPL é incompleta (“míope”) no sentido de não levar em conta tais propriedades. Outra forma de enxergar o ponto é notando pela equação característica de (20) que, em caso de certeza ( $\sigma_P = \sigma_C = 0$ ),  $\beta_3 \rightarrow \infty$ , ou seja,  $\beta_3/(\beta_3-1) \rightarrow 1$ , de forma que a cunha entre ambas as avaliações se degenera. Portanto, em se tratando da falta da opção de parada, devemos encontrar uma razão preço-custo crítica maior para o caso da análise de opções do que para o VPL.

#### 4. Resultados

A tabela abaixo resume os valores de referência utilizados na parametrização do modelo<sup>36</sup>.

**Tabela 2: Valores de referência assumidos para os parâmetros**

<i>Parâmetro</i>	<i>Valor</i>	<i>Fonte</i>
<i>r</i>	10%	-

<sup>34</sup> Sobre esta interpretação, ver também PINDYCK (1988).

<sup>35</sup> Ver BJERKSUND & EKERN (1990)

<sup>36</sup> Estimar os parâmetros ou calibrá-los a partir de dados empíricos não constituem objetivos deste trabalho, de modo que utilizamos números apresentados por outros trabalhos ou então assumimos alguns valores possíveis.

$r$	1,15%	Schwartz & Smith (2000)
$\rho$	10%	Dixit & Pindyck (1994)
$r_p$	14,5%	Schwartz & Smith (2000)
$r_c$	7%	-
$\rho$	+0,90	Dias (1996)
$\rho_{p,c}$	1	-
$r$	5%	Lei nº9478/97 (piso)
$R$	0%	Decreto nº 2705/98 (piso)

Assumiremos que a taxa de desconto é igual a 10% ao ano. Não estamos aqui muito preocupados em averiguar a verossimilhança deste valor ou mesmo se estamos ou não igualando-a à taxa de juros livre de risco, mas conforme demonstramos anteriormente, é necessário que  $r > \rho$  para garantir que o valor da opção de investimento seja não nulo.

Conforme observamos anteriormente, estamos trabalhando diretamente com a taxa de crescimento esperada do preço do petróleo,  $\rho$ , ao invés do *convenience yield*. Seguindo estimativas de Schwartz & Smith (Enron) utilizamos o valor de referência de 1,15% a.a.<sup>37</sup>

A taxa de extração  $\rho$  (igual à taxa de decaimento das reservas) é suposta exógena e igual a 10% ao ano, valor considerado razoável por DIXIT & PINDYCK (1994), equivalente a uma meia vida de cerca de 7 anos. Ao longo dos exercícios de simulação, iremos variá-la com vistas a identificar seu impacto sobre o preço-crítico. De acordo com o nosso argumento, quanto maior a taxa de extração, maior a velocidade de crescimento dos custos unitários em virtude do rápido esgotamento das pressões nos poços [ver CAIRNS (1998); DAVIS & CAIRNS (1999); OSMUNDSEN (1998)].

O desvio padrão instantâneo do preço do petróleo,  $\rho_p$ , pode ser estimado a partir de dados diários de preço de petróleo. Todavia, este não é o objetivo deste trabalho, de modo que assumiremos um valor de  $\rho_p = 14,5\%$  (semelhante ao adotado por DIXIT & PINDYCK, 1994).

Conforme argumento de proporcionalidade exposto anteriormente, o efeito Jevons tem como consequência o crescimento do custo unitário à mesma taxa de decaimento das reservas. Assumimos ainda que há incerteza sobre os custos que, de um modo geral, estão ligados a mão de obra, manutenção de equipamentos, insumos químicos, energia e depreciação de máquinas<sup>38</sup>. Não temos uma série de custos para estimar este parâmetro. Todavia, como o investidor apresenta um certo domínio sobre o conjunto de informações determinantes de seus custos, espera-se que o desvio padrão instantâneo destes seja menor que o do preço do petróleo. Assim, assumimos que o desvio padrão dos custos,  $\rho_c$ , é cerca de metade do desvio padrão do preço do petróleo,  $\rho_p$ .

O coeficiente de correlação instantâneo entre as variáveis preço e custo,  $\rho_{p,c}$ , foi parametrizado tendo em vista a constatação de que existe uma forte correlação positiva entre o preço e o custo [DIAS (1996)]. A idéia por trás disso é que, quando o preço de petróleo está alto, a entrada de produtores marginais gera pressões sobre a demanda de equipamentos necessários à extração, elevando os custos com aluguel e manutenção de

<sup>37</sup> É importante enfatizar que tais valores de referência não fazem muita diferença, pois nosso exercício consiste justamente em variá-los e avaliar o impacto sobre o preço crítico.

<sup>38</sup> Fonte; EIA/Department of Energy, USA.

máquinas. Além disso, a elevação das contratações em um mercado de trabalho fortemente influenciado por sindicatos tende a gerar pressões de custo salarial. Neste sentido, a presença de uma correlação positiva entre preço e custo tenderá a reduzir o grau de risco do projeto<sup>39</sup>. DIAS (1996) cita estimações em torno de 90% para este coeficiente, que adotaremos como referência.

A variável  $i$  representa a razão entre o investimento necessário para desenvolver 1 barril de petróleo da reserva e o custo operacional ( $I/C$ ). Conforme argumentamos anteriormente, se supusermos que ambas as variáveis têm uma relação direta entre si, dependente da qualidade e da acessibilidade dos recursos do campo, podemos variar a razão  $i$  e averiguar seu impacto sobre o preço-custo crítico  $p^*$ . Quanto maior  $i$ , pior a qualidade do campo. Há modelos de dois fatores [ver DIXIT & PINDYCK, 1994, cap. 6] que não distinguem os gastos de desenvolvimento e de operação, de modo que adotaremos um valor de referência de  $i = 1$ .

Por fim, as alíquotas de royalties e de imposto sobre a renda foram definidas a partir da legislação brasileira (Lei nº 9478/97 ou Lei do Petróleo). Os *royalties* devem variar entre 5% e 10% conforme as condições de risco e lucratividade esperadas para o projeto. Como referência para os exercícios de simulação com os demais parâmetros, adotamos a referência de 5%, seu valor mínimo. As participações especiais, por sua vez, estão regulamentados no decreto nº 2705 de 3/08/98 e estabelecem alíquotas progressivas de 0 a 40% conforme o volume de produção e tem como objetivo garantir uma participação maior da União em projetos mais lucrativos. A base de incidência é a receita líquida, isto é, deduzem-se do faturamento os custos e os gastos com *royalties*. Conforme argumenta-se em POSTALI (2002) trata-se de uma variante do chamado imposto sobre a renda do recurso, que apresenta propriedades de neutralidade quando se realiza uma análise de valor presente líquido. Novamente, o valor de referência para as simulações será o piso de isenção<sup>40</sup>.

A parametrização do modelo a partir dos valores definidos na tabela 2 resulta nos seguintes valores para a razão preço-custo crítica de entrada ( $p^E$ ) e de saída ( $p^S$ ), para cada uma das abordagens e opções sugeridas. Consideramos três cenários possíveis para os custos de interrupção em relação ao custo operacional ( $? = 0, 0,5$  e  $1$ )<sup>41</sup>.

**Tabela 3: Resultados de referência -  $p^*$  o  $P/C$**

<i>Modelo</i>	$p^E$	$p^S$
<i>Valor Presente Líquido</i>	2,1676	-
<i>Opções Reais – Sem opção de interrupção</i>	2,2665	-
<i>Opções Reais – Com opção de interrupção sem custos</i>	1,6152	<u>1,0087</u>
<i>Opções Reais – Com opção de interrupção com custo ?<math>=0,5</math></i>	1,7128	0,9606
<i>Opções Reais – Com opção de interrupção com custo ?<math>=1</math></i>	1,7903	0,9125

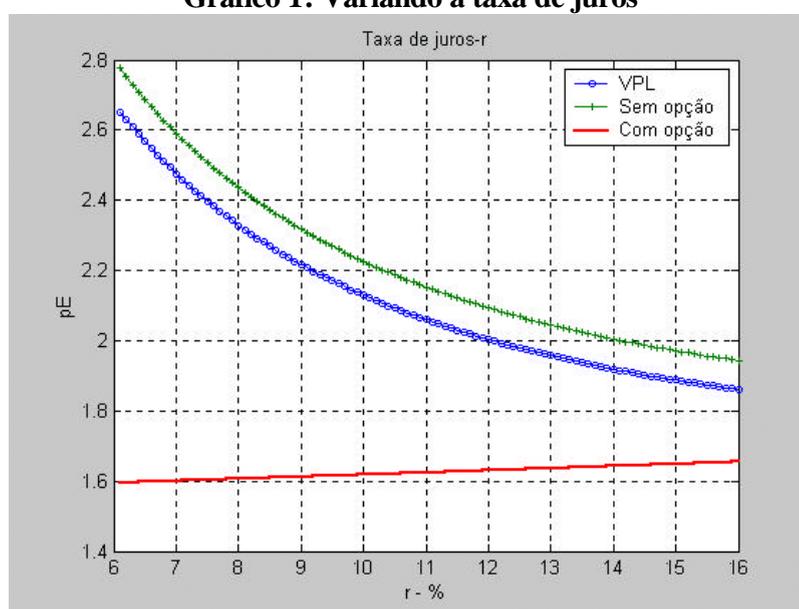
<sup>39</sup> Se a correlação entre  $P$  e  $C$  fosse negativa, o risco do projeto seria maior.

<sup>40</sup> Cabem aqui duas observações pertinentes sobre as participações especiais. Em primeiro lugar, estamos assumindo que o IRR e as Participações Especiais previstas na Lei nº 9478/97 são idênticas, o que não é o caso. Em segundo lugar, as Participações Especiais só incidem sobre campos de grande produção, conforme as regras do decreto nº 2705/98, de modo que há projetos que podem ficar livres dele.

<sup>41</sup> Os cálculos foram feitos no software *Mathematica*.

A tabela mostra valores críticos para a decisão de desenvolver a reserva ( $p^E$ ) e de paralisar ( $p^S$ )<sup>42</sup>. Em primeiro lugar, nota-se que o valor crítico para o desenvolvimento, sob a regra do fluxo de caixa descontado é menor do que para as opções reais quando não há opção de paralisação. Tal resultado é consistente com o argumento de DIXIT & PINDYCK (1994) de que a nova abordagem incorpora a *irreversibilidade* do investimento, ou seja, é necessário um preço crítico superior para induzi-lo. Com relação à presença de opção de interrupção, duas observações são interessantes: a razão indutora do desenvolvimento ( $p^E$ ), cai com esta flexibilidade, mas é crescente à medida que o custo de paralisação aumenta. Por outro lado, quanto maior o custo de paralisação, menor a razão crítica de saída ( $p^S$ ), devido ao efeito da *histerese*, já que o custo de interromper a produção dificulta a tomada desta decisão.

**Gráfico 1: Variando a taxa de juros**

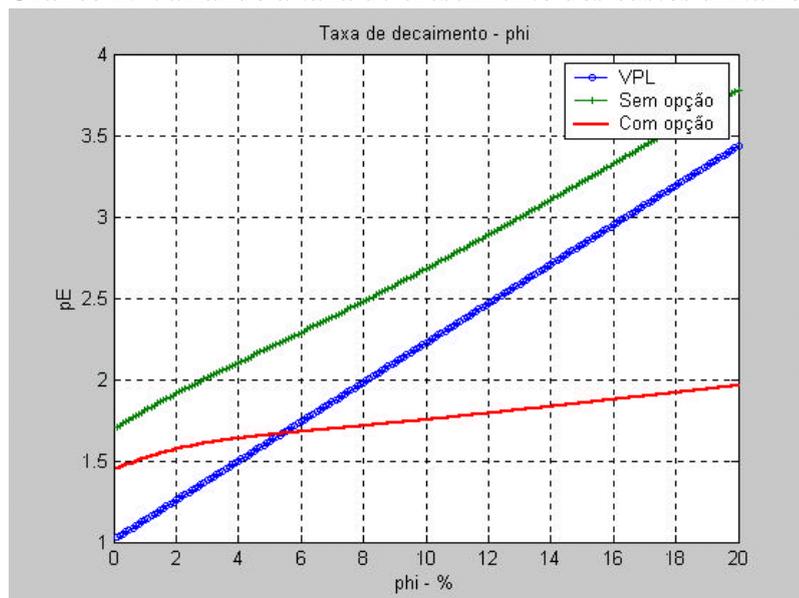


O gráfico 1 ilustra o efeito de variações na taxa de juros sobre o preço crítico de investimento,  $p^E$ , para cada os três primeiros casos (VPL, Sem opção de paralisação, Com opção de paralisação a custo zero). Quando se considera a flexibilidade operacional de paralisar a atividade, um aumento da taxa de juros irá dificultar apenas sensivelmente o investimento, elevando o preço crítico necessário para induzi-lo. Entretanto, quando se consideram o fluxo de caixa descontado e a opção real sem flexibilidade, o resultado contradiz as conclusões da teoria tradicional de que um aumento da taxa de juros tende a inibir o investimento. Conforme aponta o gráfico 1, a elevação da taxa de juros contribui

<sup>42</sup> Deve-se observar que não estamos fazendo a distinção entre paralisação e abandono. Supõe-se que este último seja definitivo enquanto o primeiro seja temporário. A distinção entre ambos pode ser modelada pelo *custo de retomada*, o qual varia entre dois extremos: zero, para o caso de paralisação e  $I$ , para o caso de abandono. Ou seja, se o agente decidir abandonar a produção, ele só poderá retomá-la se investir tudo novamente.

para antecipar o investimento<sup>43</sup>, na medida em que reduz  $p^E$ . Este exercício ilustra como o efeito da taxa de juros pode ser ambíguo na presença de opções reais, sobretudo quando se incorpora o custo como variável de estado [McDONALD & SIEGEL, 1985]: por um lado, taxas de juros mais elevadas inibem o investimento mas, por outro lado, o impulsionam devido ao aumento do custo de oportunidade de manter em aberto a opção de investimento (via *convenience yield*). Isso acontece porque as reservas desenvolvidas são consideradas um ativo cujo valor cresce com o aumento da taxa de juros. Nesta abordagem, haverá uma aceleração do desenvolvimento da jazida quando a taxa de juros crescer<sup>44</sup>.

**Gráfico 2: Variando a taxa de crescimento dos custos unitários**



O gráfico 2 simula o impacto de variações em  $\phi$  sobre a razão preço-custo crítica<sup>45</sup>,  $p^E$ . Dado que  $\phi^{-1}$  é a razão reserva/produção, quanto maior  $\phi$ , maiores as restrições tecnológicas da jazida, expressas, nas nossas hipóteses, no crescimento dos custos unitários. Uma maior taxa de vazão implica em maior taxa de crescimento do custo de produção por barril, de modo que quanto maior  $\phi$  maior o preço crítico<sup>46</sup>. O efeito para os casos de Valor Presente Líquido e Opções Reais sem paralisação são análogos conforme aumenta a taxa de extração.

No entanto, quando se considera a presença de opção de parada, o preço crítico cresce bem menos, de modo que a distorção sobre a decisão de investir é bem menor (a

<sup>43</sup> Quando a taxa ultrapassa valores em torno de 40%, o preço crítico volta a crescer, conforme seria esperado pela teoria usual.

<sup>44</sup> CORTAZAR & SCHWARTZ (1993) apresentam um modelo de investimentos em estoques e chegam a conclusões análogas quanto ao efeito da taxa de juros e da incerteza sobre o preço que dispara a acumulação de estoques. Eles entendem que estes são considerados ativos e, como tal, aumentos da taxa de juros tendem a valorizá-los, apesar do usual efeito do aumento do custo de oportunidade de retê-los.

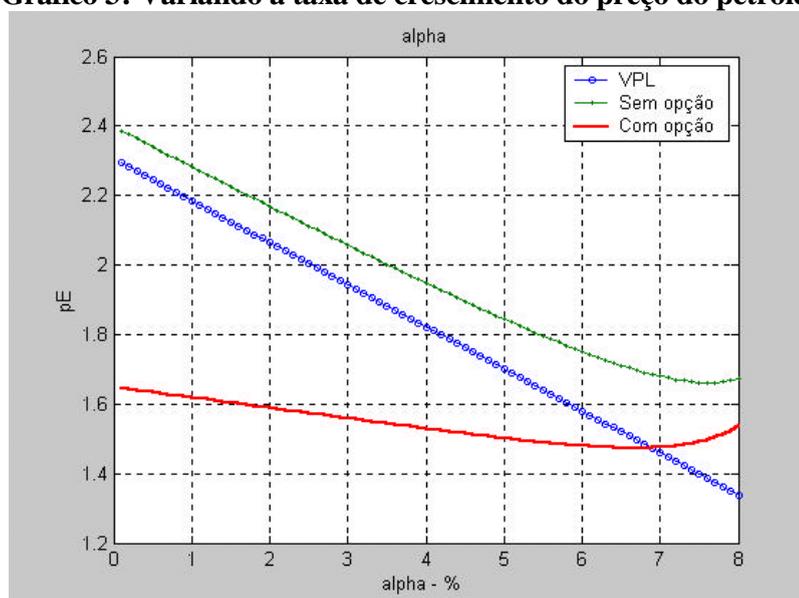
<sup>45</sup> Com o intuito de evidenciar a diferença entre as curvas para valor presente líquido e opção sem parada, reajustamos o desvio padrão do preço,  $\sigma_p$ , para 0,245. Daí a não correspondência com a tabela 1 para  $\phi = 10\%$ .

<sup>46</sup> Voltando à interpretação de DAVIS & CAIRNS (1999), restrições tecnológicas reduzem o valor da reserva em relação ao estimado pelo Princípio de Hotelling, aumentando o custo de oportunidade do investimento.

escala do gráfico não permite visualizar, mas o valor máximo de  $p^E$  no caso irrealista de  $\alpha = 100\%$  é 2,75). Isso era esperado, já que em caso de crescimento muito elevado dos custos unitários, o concessionário tem a possibilidade de interromper temporariamente a produção, evitando perdas. Desta forma, fica claro o papel da flexibilidade de paralisação sobre a disposição de investir, reduzindo a sensibilidade do preço crítico em relação às restrições quantitativas da jazida.

Outro detalhe curioso é que para valores baixos de  $\alpha$ , o preço crítico com opção de parada é maior que no caso de VPL. Uma interpretação possível para isso é que, nesta situação, os custos de manter a opção de investimento aberta são muito altos, valendo a pena desenvolver imediatamente.

**Gráfico 3: Variando a taxa de crescimento do preço do petróleo**



O gráfico 3 mostra o efeito de variações na taxa de crescimento do preço do petróleo sobre  $p^E$ , mantidos os demais parâmetros constantes. Confirmando a intuição, um aumento da taxa esperada de valorização do petróleo irá reduzir o preço crítico, sobretudo no caso do valor presente descontado. No caso das opções reais, o valor do preço crítico decai até  $\alpha$  se aproximar da taxa de juros, quando então ela explode devido a uma indeterminação assintótica. Valores de  $\alpha$  acima da taxa de juros tornam o valor da opção de investir negativo<sup>47</sup>.

É interessante observar como este resultado exibe certa consistência em relação ao princípio de Hotelling, notadamente quanto às considerações de DAVIS & CAIRNS (1999). A condição necessária para que haja extração, segundo aquele princípio, é que a taxa de crescimento do valor sombra seja menor ou igual à taxa de juros (em equilíbrio, vale a igualdade se forem desprezadas as restrições físicas e tecnológicas para a extração do

<sup>47</sup> Além disso, deve-se ter em vista que, na presença de custos estocásticos, é necessário que a relação  $r > \alpha - f$  se mantenha para evitar que o valor da reserva se torne negativo. Por isso evitamos simular valores de  $\alpha$  muito elevados, pois isso violaria esta condição.

recurso) pois, caso contrário, valeria a pena para o produtor deixar os recursos no subsolo em virtude do ganho de capital daí recorrente. Isso equivale, na nossa notação, à condição de que  $r > ? - ?$ . Assim, quando se reintroduzem explicitamente os custos de operação, a proximidade entre a teoria clássica de Hotelling e a nova abordagem das opções reais é visível, contrariando aqueles que consideram a primeira ultrapassada<sup>48</sup>.

Duas conclusões fundamentais podem ser derivadas dos exercícios acima. Em primeiro lugar, o preço crítico na presença de opção de paralisação é menor que nos demais casos, para a maior parte dos valores simulados para  $r$ ,  $?$  e  $?$ . Isso significa que a presença de opção de paralisar atua como um forte estimulador do investimento, na medida em que adiciona valor ao projeto. É importante salientar que *o efeito da opção de interrupção é significativo a ponto de mais do que compensar o efeito da irreversibilidade*.

Em segundo lugar, nota-se que a opção de paralisação reduz significativamente a sensibilidade do investimento em relação a variações na taxa de juros, na taxa de crescimento dos custos (restrições tecnológicas) e no *drift* do preço.

É claro que o modelo e as simulações apresentadas apresentam limitações e várias extensões são possíveis: pode-se introduzir um processo estocástico mais complexo para determinar o valor unitário do barril de petróleo (e.g.: movimentos de reversão à média, movimentos de saltos com reversão à média, movimentos multifatoriais, etc.). Além disso, a taxa de juros foi considerada exógena, mas poder-se-ia introduzir uma avaliação ajustada ao risco (via CAPM, por exemplo). Por fim, considera-se apenas uma flexibilidade possível, quando na prática os projetos de investimento possuem várias opções embutidas.

Mesmo com as limitações listadas, acreditamos que tais resultados são suficientes para mostrar a importância da consideração dos valores das flexibilidades (opções), sobretudo quando se introduzem os custos cumulativos. Tal conclusão se reforça diante dos resultados que mostram que restrições de produção (Efeito Jevons) possuem um impacto bem menor sobre a decisão de investir quando as flexibilidades são introduzidas.

O que interessa observar é que a possibilidade de fechamento reduz  $p^E$ , facilitando o desenvolvimento de uma reserva. Se tomarmos a opção de paralisação como um caso estilizado de flexibilidade total no gerenciamento da produção, a análise acima nos permite concluir que uma maneira de atrair investimentos no setor de petróleo e gás seria conceder ao concessionário uma maior autonomia na alocação de sua produção ao longo do ano.

Esta discussão é relevante pois, atualmente, de acordo com a Lei nº 9478/97, o concessionário deve entregar até outubro de cada ano um Plano de Produção para o ano seguinte, o qual deve ser aprovado pela Agência Nacional do Petróleo - ANP. Durante o ano, quaisquer desvios acima de 15% em relação ao plano de produção devem ser justificados à agência. O que os resultados acima sugerem é que uma maior liberdade de operação ao longo do ano pode contribuir para facilitar a decisão de investir em desenvolvimento por parte de firmas detentoras de concessão de exploração, já que o pressuposto fundamental da análise de opções reais é permitir ao agente um gerenciamento ativo de seu projeto, reagindo a mudanças no cenário econômico.

---

<sup>48</sup> Para uma visão geral do debate, ver CAIRNS (1998).

**BIBLIOGRAFIA:**

- BJERKSUND, P., & S. EKERN, 1990. **Managing Investment Opportunities under price uncertainty: From 'Last Chance' to 'Wait and See' Strategies.** *Financial Management* 19 (Autumn), pp.65-83.
- BRENNAN, M.J. e E.S. SCHWARTZ, 1985. **Evaluating Natural Resource Investments.** *Journal of Business* 58, n° 2, 135-157.
- BRENNAN, M. J. e L. TRIGEORGIS (orgs.), 2000. **Project Flexibility, Agency, and Competition: New Developments in the Theory and Application of Real Options.** Nova York: Oxford University, 2000.
- CAIRNS, R.D., 1990. **The Economics of Exploration for Non-Renewable Resources.** *Journal of Economic Surveys* 4, n° 4, Dez. 1990, 361-395.
- CAIRNS, R.D., 1994. **On Gray's Rule and the Stylized Facts of Non-Renewable Resources.** *Journal of Economic Issues* 28, n° 3, Set.94, 777-798.
- CAIRNS, R.D., 1998. **Are mineral deposits valuable? A reconciliation of theory and practice.** *Resources Policy* 24, n° 1, Mar/98, pp.19-24.
- CHERIAN, J.A, J. PATEL e I. KHIRIPKO, 2000. **Optimal Extraction of Nonrenewable Resources When Costs Cumulate.** In BRENNAN, M. J. e L. TRIGEORGIS (orgs.), 2000. *Project Flexibility, Agency, and Competition: New Developments in the Theory and Application of Real Options.* Nova York: Oxford University, 2000.
- CORTAZAR, G. e E. SCHWARTZ, 1993. **A Compound Option Model of Production and Intermediate Inventories.** *Journal of Business* 66 (4) pp. 517-540.
- COPELAND, T., 2002. **Real options and strategic decisions.** *Strategic Finance* 83, vol.10, april, pp. 8-10.
- DAVIS, G. A. e R. D. CAIRNS, 1999. **Valuing petroleum reserves using current net price.** *Economic Inquiry*, v. 37 (2), (April), pp. 295-311.
- DIAS, M.A.G., 1996. **Investimento sob Incerteza na Exploração e Produção de Petróleo.** Dissertação de Mestrado, PUC/RJ, não Publicada.
- DIAS, M.A.G., 2001. **Real Options in Upstream Petroleum: Overview of Models and Applications.** Mimeo.
- DIXIT, A., 1989. **Entry and Exit Decisions under Uncertainty.** *Journal of Political Economy* 97 (3), pp. 620-638.
- DIXIT, A. , 1992. **Investment and hysteresis.** *Journal of Economic Perspectives* 6 (1), 107-132.
- DIXIT, A. K. e R. S. PINDYCK, 1994. **Investment under Uncertainty.** Princeton University Press. Nova Jersey.
- GRAY, L.C., 1914. **Rent under Assumption of Exhaustibility.** *The Quarterly Journal of Economics* 28, n° 3, may/1914, 466-489.

- HILLIARD, J.E. e J. REIS, 1998. **Valuation of Commodities Futures and Options Under Stochastic Convenience Yields, Interest Rates, and Jump Diffusions in the Spot**. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 33 (1), 61-86.
- HOTELLING, H., 1931, **The Economics of Exhaustible Resources**. *Journal of Political Economy*, Abr/1931, pp.137-175.
- KULATILAKA, N. 1995. **Operating Flexibilities in Capital Budgeting: Substitutability and Complementarity in Real Options**. In TRIGEORGIS, L. (org.), *Real Options in Capital Investment: Models, Strategies, and Applications*. Praeger Ed., 1995.
- KULATILAKA, N. & S. G. MARKS, 1988. **The Strategic Value of Flexibility: Reducing the Ability to Compromise**. *American Economic Review* 78 (3), 574-580.
- MAJD, S. e R. PINDYCK, 1987. **Time to build, Option Value and Investment Decisions**. *Journal of Financial Economics* 18 (march), pp. 7-27.
- MCDONALD, R. L. e D.R. SIEGEL, 1985. **Investment and the Valuation of Firms when there is an option to shut down**. *International Economic Review* 26, N° 2, Jun/85, pp. 331-349.
- MOSZKOWICZ, V. N., 2003. **Validação do Critério de Avaliação de Projetos Utilizando a Teoria das Opções Reais: E & P de campos de petróleo nacionais, supondo preços como movimento geométrico browniano**. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Industrial, PUC/RJ (Não publicada).
- OSMUNDSEN, P., 1998. **Dynamic taxation of non-renewable natural resources under asymmetric information about reserves**. *Canadian Journal of Economics* 31, n° 4, out./98, pp. 933-951.
- PADDOCK, J.L, D.R. SIEGEL e J.L SMITH, 1988. **Option valuation of claims on real assets: the case of offshore petroleum leases**. *The Quarterly Journal of Economics* 103, Ago/88, pp.479-508.
- PINDYCK, R.S., 1988. **Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm**. *American Economic Review* 78, n° 5 (December), pp. 969-985.
- PINDYCK, R. S., 1991. **Irreversibility, Uncertainty, and Investment**. *Journal of Economic Literature* 29, 3 (Sept.), pp. 1110-1148.
- POSTALI, F.A.S, 2002, **Renda Mineral, Divisão de Riscos e Benefícios Governamentais na Exploração de Petróleo no Brasil**. BNDES, Rio de Janeiro.
- SCHWARTZ, E. S. & L. TRIGEORGIS (orgs.) , 2001. **Real Options and Investment under uncertainty: classical readings and recent contributions**. Cambridge: MIT, 2001.
- TOURINHO, O.A.F.,1979, **The Valuation of Reserves of Natural Resources: An Option Pricing Approach** University of California, Berkeley, PhD Dissertatio n, November 1979.
- TRIGEORGIS, L., 1993. **The Nature of Option Interaction and the Valuation of Investments with Multiple Real Options**. *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 28, n° 1 (March), 1-20.

TRIGEORGIS, L., 1996a. **Real options – managerial flexibility and strategy in resource allocation.** MIT Press, 1996.

TRIGEORGIS, L., 1996b. **Evaluating leases with complex operating options.** European Journal of Operational Research 91, pp. 315-329.